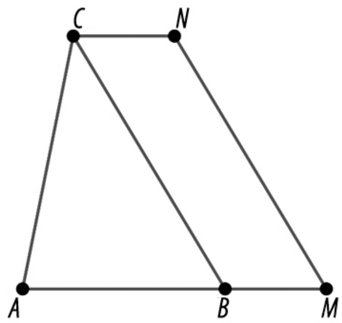
MATEMÁTICA APLICADA

1 No triângulo *ABC*, tem-se $\overline{AB} = 4\text{cm}$, e a altura baixada por *C* e perpendicular a $\overline{AB}$ tem comprimento $h = 5$cm. No prolongamento do segmento $\overline{AB}$, temos o ponto *M*, e o quadrilátero *BMNC* é um paralelogramo. Sabendo que a área do quadrilátero *AMNC* é igual a 20 cm^2, calcule o comprimento do segmento $\overline{BM}$.



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A área do triângulo *ABC* é $\frac{1}{2}(4 \times 5) = 10$ cm^2. Assim, a área do paralelogramo *BMNC* tem que ser $20 - 10 = 10$ cm^2.

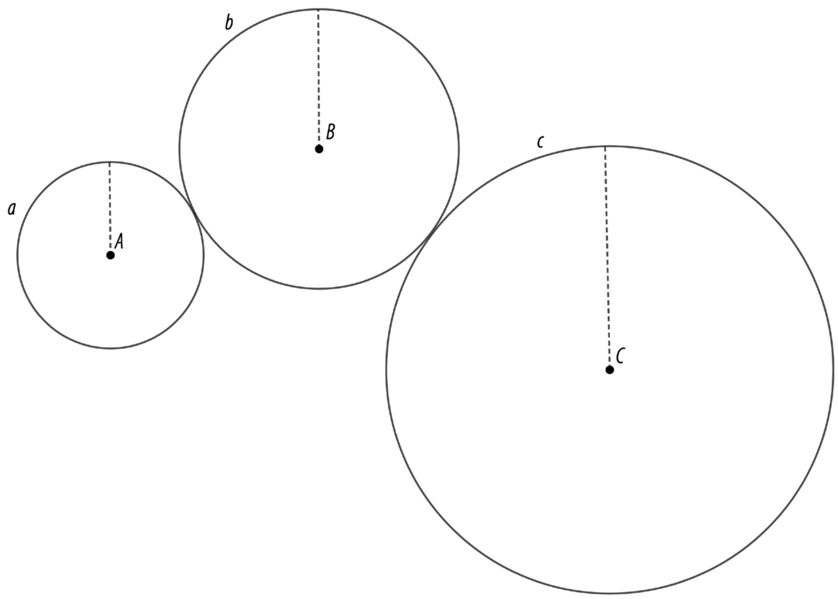
Como sua altura é 5 cm, sua base *BM* tem que medir 2 cm.

MATEMÁTICA APLICADA

2 Os três círculos da figura representam três rodas circulares que podem girar em torno de seus centros. A roda *a* de centro *A* tangencia a roda *b* de centro *B*, que, por sua vez, tangencia a roda *c* de centro *C*. Quando a roda *a* gira em torno de *A*, ela induz uma rotação de *b*, em torno de *B*, que, por sua vez, induz uma rotação de *c* em torno de *C*. As transmissões das rotações se dão perfeitamente, pois não há deslizamento entre uma roda e outra.

Os raios marcados na figura estão todos na vertical, e esta é a configuração antes de *a* começar a girar.

Sabendo que os raios de *a*, *b* e *c* são, respectivamente, 20 cm, 30 cm e 48 cm, calcule o menor número de voltas completas que a roda *a* tem que efetuar para que todos os raios marcados voltem a ficar simultaneamente na vertical.



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Ao completar uma volta, cada ponto da parte externa da roda *a* percorre $2\pi \cdot 20$ cm. Mas este é o comprimento do percurso realizado por cada ponto da roda *b*. Portanto, como a volta completa de *b* é $2\pi \cdot 30$ cm, a roda *b* gira $\frac{2\pi \cdot 20}{2\pi \cdot 30} = \frac{2}{3}$ de uma volta completa. Pelo mesmo motivo, a roda *c* gira $\frac{2\pi \cdot 20}{2\pi \cdot 48} = \frac{5}{12}$ de uma volta completa.

Precisamos, então, saber o menor número *k* de voltas necessárias para que $k\frac{2}{3}$ seja um inteiro e $k\frac{5}{12}$ também seja um inteiro. Ora, *k* tem então que ser o mínimo múltiplo comum de 3 e 12. Portanto, $k = 12$, isto é, o menor número de voltas completas que a roda a tem que efetuar para que todos os raios marcados voltem a ficar simultaneamente na vertical é 12.

MATEMÁTICA APLICADA

3 A quantidade de mortadela que a *Padaria da Esquina* consegue vender mensalmente depende do preço estabelecido para o produto. O gerente da *Padaria da Esquina* percebeu que a quantidade q (em kg) de mortadela vendida por mês é aproximadamente a seguinte função do preço x (em reais/kg): $q(x) = 600\text{-}25x$.
Atualmente, o preço da mortadela é x=10 reais por quilograma, portanto a quantidade vendida por mês é aproximadamente $q(10) = 350$ kg.
O faturamento da *Padaria da Esquina* com a venda de mortadela é a quantidade vendida multiplicada pelo preço unitário. Como exemplo, com o preço atual, $x = 10$ reais, a *Padaria da Esquina* consegue faturar (600-25· 10)· 10=3500 reais por mês com a venda de mortadela.
Qual é o preço x, em reais, que a *Padaria da Esquina* deve estabelecer para o quilograma de mortadela de modo a maximizar seu faturamento com a venda desse produto?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

O faturamento é $f(x) = g(x) \cdot x = 600x - 25 \cdot x^2$, isto é, uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a=-25, b=600 e c=0.

Assim, para o faturamento ser máximo, deve-se ter $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-600}{-50} = 12$ reais por quilograma.

MATEMÁTICA APLICADA

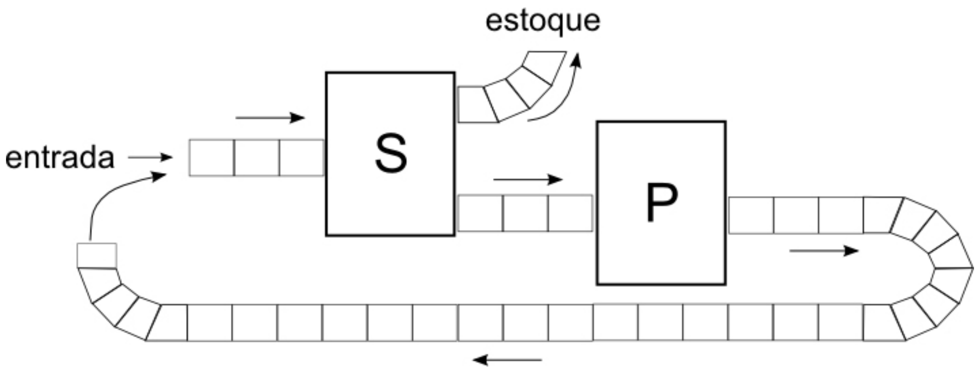
4 Certa fábrica produz chocolates e deseja fazer uma promoção colocando um ou mais selos premiados em algumas barras de seu produto. Em cada selo, está escrito "Vale Outra Barra de Chocolate".

Na fábrica, há duas máquinas: a S (separar) e a P (premiar).

A máquina S pega cada barra de chocolate que está em sua esteira de entrada e a coloca, alternadamente, na esteira de saída esquerda (que vai para o estoque) ou direita (que vai para a esteira de entrada de P). A primeira barra da esteira de entrada vai para o estoque.

A máquina P insere na embalagem de cada chocolate de sua esteira de entrada um selo premiado.

Inicialmente, são colocadas $N=2^{14}$ barras de chocolate na esteira de entrada de S. Depois que P colocou o selo em todas as barras de sua esteira, essas mesmas barras são recolocadas na entrada da máquina S e todo o processo é repetido. Estas iterações são realizadas seguidamente até que todas as barras estejam no estoque.



Calcule:

A o número máximo de selos em uma mesma barra de chocolate;

B o número total de barras gratuitas que serão distribuídas.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Na primeira passagem por S há 2^{14} barras e 2^{13} ficam com um selo. Na segunda passagem há 2^{13} e 2^{12} ficam com 2 selos. Na k-ésima passagem há $2^{(14-k+1)}$ barras e $2^{(14-k)}$ ficam com k selos. Portanto, na 14ª passagem ($k=14$), há 2^1 barras e 1 barra fica com 14 selos. Na última passagem (15ª) esta última barra vai para o estoque sem nenhum selo adicional. O número máximo de selos é 14, recebido pela última barra.

B Temos que calcular o número de selos inseridos nas embalagens.

Na primeira passagem por S há 2^{14} barras e são inseridos 2^{13} selos.

Na segunda passagem há 2^{13} barras e são inseridos 2^{12} selos.

Na k-ésima passagem há $2^{(14-k+1)}$ barras e são inseridos $2^{(14-k)}$ selos.

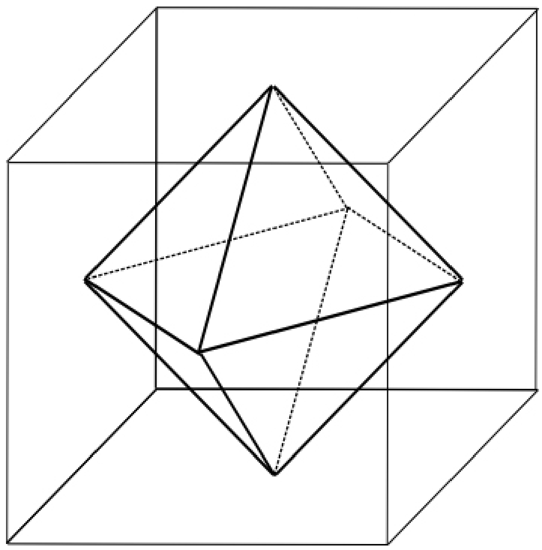
Portanto, na 14ª passagem ($k=14$), há 2^1 barras e é inserido $2^0=1$ selo.

Na última passagem (15ª) esta última barra vai para o estoque e nenhum selo é inserido. O número total de selos inseridos é, portanto,

$$Tot=\left(1+2+4+\ldots+2^{13}\right)=\frac{1-2^{14}}{1-2}=2^{14}-1=16383\,.$$

MATEMÁTICA APLICADA

5 Um cubo tem aresta de comprimento $a=6$ cm. Em cada face do cubo, considere seu "ponto central" (encontro das diagonais daquela face). Ligando o ponto central de cada face com o ponto central das faces adjacentes, tem-se as arestas de um novo poliedro, interior ao cubo original.
Calcule o volume deste novo poliedro.



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

O novo poliedro é um octaedro regular de aresta $3\sqrt{2}$ cm. Seu volume é equivalente ao de duas pirâmides quadrangulares regulares, congruentes, com arestas da base medindo $3\sqrt{2}$ cm e altura 3 cm (metade da aresta do cubo).

Portanto, o volume desse novo poliedro é $2\cdot\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2\cdot 3}{3}=36\ \text{cm}^3$.

6 A tabela ao lado mostra o *ranking* das seleções da FIFA em maio de 2019.

A cada seleção k é associada uma pontuação r_k, que procura refletir o quanto a seleção é "forte".

A ideia aproximada do significado dessa pontuação é a seguinte: a probabilidade da seleção i (com pontuação r_i) vencer a seleção j (com pontuação r_j) é dada por:

$$\text{Prob } i \text{ vencer } j = \frac{1}{1+10^{(r_j - r_i)/600}}$$

Usando este modelo e a tabela com a pontuação da FIFA, determine quais seleções têm, no mínimo, 60% de probabilidade de vencer a seleção da Argentina.

Dados: $\log_{10}(3) \approx 0{,}48$, $\log_{10}(2) \approx 0{,}30$.

Posição	Seleção	Pontos
1	Bélgica	1737
2	França	1734
3	Brasil	1676
4	Inglaterra	1647
5	Croácia	1621
6	Uruguai	1613
7	Portugal	1607
8	Suíça	1604
9	Espanha	1601
10	Dinamarca	1586
11	Argentina	1580
12	Colômbia	1573
13	Alemanha	1570
14	Suécia	1567

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Temos que resolver a inequação $\frac{1}{1+10^{(1580-r)/600}} \geq 0{,}6$. Para isto, vamos manipular a desigualdade:

$$\frac{1}{1+10^{(1580-r)/600}} \geq 0{,}6 \rightarrow 1+10^{(1580-r)/600} \leq \frac{10}{6} \rightarrow 10^{(1580-r)/600} \leq \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1580-r}{600} \leq \log_{10} 2 - \log_{10} 3$$

Portanto, $r \geq 600 \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + 1580 \approx 1688$.

Logo, apenas as seleções da Bélgica e da França têm, no mínimo, 60% de probabilidade de vencer a seleção da Argentina.

7 Dados *a* e *b* inteiros positivos, sejam $M(a,b)=\frac{a+b}{2}$ a média aritmética, $G(a,b)=\sqrt{ab}$ a média geométrica e $H(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, a média harmônica dos números *a* e *b*.

Determine o número de pares ordenados de inteiros positivos (*a*, *b*) que satisfazem a equação *G(M(a,b), H(a,b))* = 2020.

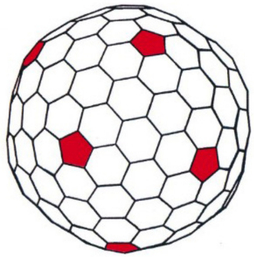
RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Como $G\left(M(a,b),H(a,b)\right)=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}=\sqrt{ab}$, então procuramos os pares ordenados (*a*,*b*) tais que $a\cdot b=2020^2$. Como $2020=2^2\cdot 5\cdot 101$

então $2020^2=2^4\cdot 5^2\cdot 101^2$. Logo, para escolher o primeiro termo a do par ordenado temos $(4+1)\cdot(2+1)\cdot(2+1)=45$ possibilidades, correspondentes às potências dos fatores primos de 2020^2. O segundo termo do par ordenado fica determinado pelo primeiro.
Portanto, temos 45 pares ordenados.

MATEMÁTICA APLICADA

8 O fulereno é uma família de substâncias químicas compostas exclusivamente por átomos de carbono. Considere uma forma comum de organização da molécula do fulereno, que é a de um poliedro convexo formado exclusivamente por pentágonos e hexágonos, onde cada vértice é um átomo de carbono. Todos os átomos de carbono se ligam sempre a três outros átomos de carbono, formando um poliedro convexo (veja figura).



fonte:Terrones, Structural Chemistry,2002, vol: 13.

Sabendo que certa molécula de fulereno tem 240 faces hexagonais, determine o número *p* de faces pentagonais.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Podemos usar a relação de Euler em um poliedro convexo, $V+F=A+2$. Se há 240 hexágonos e *p* pentágonos o número de faces é $F=240+p$. Podemos também calcular V, pois cada vértice pertence a 3 polígonos: $V=\dfrac{6\cdot 240+5\cdot p}{3}$. Já o número de arestas é $A=\dfrac{6\cdot 240+5\cdot p}{2}$, pois cada aresta pertence a dois polígonos.

Deste modo, $V+F=A+2$ se traduz em $\dfrac{6\cdot 240+5\cdot p}{3}+240+p=\dfrac{6\cdot 240+5\cdot p}{2}+2$ e, portanto, $p=12$.

Observação: mesmo que o número de hexágonos seja diferente de 240 o número de pentágonos é $p=12$. O número de pentágonos é independente do número de hexágonos.

9 Considere o conjunto $A=\{1,2,3,4\}$, e seja $P(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.
Considere as funções $f: A \rightarrow P(A)$, isto é, funções que a cada $x \in A$ associam um $f(x)$, que é um subconjunto de *A*.
Determine quantas dessas funções existem tais que $x \in f(x)$ para todo $x \in A$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Tomando um elemento qualquer *x* de *A* existem 2^3 subconjutos de *A* tais que $x \in A$. Portanto, existem 2^3 alternativas para a imagem de *x*. Como existem 4 elementos em *A*, podemos montar $(2^3)^4$ funções diferentes com a propriedade pedida. Ou seja, existem $(2^3)^4 = 4096$ funções tais que $x \in f(x)$ para todo $x \in A$.

MATEMÁTICA APLICADA

10 Em certo campeonato de futebol de robôs, a seleção brasileira chegou à decisão por pênaltis. Instantes antes das cobranças, o atacante da seleção brasileira R2 e o goleiro adversário HAL estão sendo programados.

A programação do atacante consiste em escolher um número real p, com $0 \le p \le 1$. Esta escolha tem o efeito de fazer com que o atacante chute para a direita do gol com probabilidade p e chute para a esquerda do gol com probabilidade $1 - p$.

Da mesma forma, o técnico adversário escolhe um número real q para programar o goleiro, com $0 \le q \le 1$, que terá o efeito de fazê-lo pular para a direita do gol com probabilidade q e para a esquerda do gol com probabilidade $1 - q$.

Conhecendo tanto o atacante quanto o goleiro, ambos os técnicos têm o seguinte quadro sobre as probabilidades de o atacante marcar um gol, caso ele chute para a direita ou para a esquerda do gol e o goleiro pule para a direita ou para a esquerda do gol:

Goleiro / Atacante	Pulo na direita do gol	Pulo na esquerda do gol
Chute na direita do gol	0,4	0,8
Chute na esquerda do gol	0,6	0,3

A Calcule a probabilidade de o atacante fazer gol caso $p = 0{,}5$ e $q = 0{,}5$.

B A regra permite que o técnico do goleiro tenha o direito de saber o valor de p escolhido pelo técnico brasileiro antes de fazer a sua escolha de q. Suponha que o técnico do goleiro seja bem esperto e vai escolher o valor de q de modo a conseguir a menor probabilidade do atacante fazer o gol. Faça o gráfico da função $y = f(p)$, onde $0 \le p \le 1$ é o valor escolhido pelo técnico brasileiro para o atacante e y é a probabilidade de o atacante marcar o gol.

C Ainda no cenário do item **B** determine o valor de p que o técnico brasileiro deve escolher para que o atacante brasileiro tenha maior probabilidade de marcar o gol.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A A probabilidade pedida é $\Pr(gol) = 0{,}4 \cdot p \cdot q + 0{,}8 \cdot p \cdot (1-q) + 0{,}6 \cdot (1-p) \cdot q + 0{,}3 \cdot (1-p) \cdot (1-q)$, com $p=0{,}5$ e $q=0{,}5$. Portanto, a probabilidade é $\Pr(gol) = 0{,}525$.

B Se o atacante tem parâmetro p e o goleiro tem parâmetro q, a probabilidade de o atacante marcar o gol é dada por $P(p,q) = 0{,}4 \cdot p \cdot q + 0{,}8 \cdot p \cdot (1-q) + 0{,}6 \cdot (1-p) \cdot q + 0{,}3 \cdot (1-p) \cdot (1-q)$.

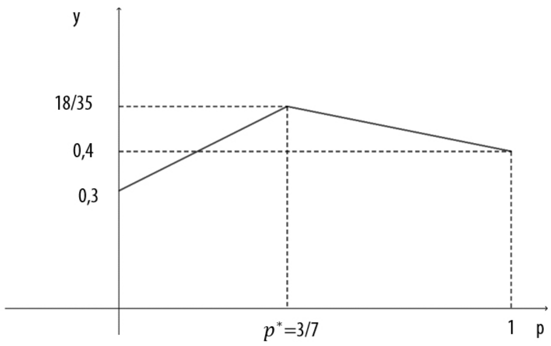
Colocando a variável q em evidência nesta expressão chegamos a $P(p,q) = (0{,}3 - 0{,}7 \cdot p) \cdot q + 0{,}3 + 0{,}5 \cdot p$.

Ou seja, fixado p a probabilidade $P(p,q) = a \cdot q + b$ é uma função afim de q com coeficiente angular $a = (0{,}3 - 0{,}7 \cdot p)$ e coeficiente linear $b = (0{,}3 + 0{,}5 \cdot p)$. Esta função de q é crescente se a é positivo ($p<3/7$) e decrescente quando a é negativo ($p>3/7$).

Como o parâmetro q vai ser escolhido para minimizar a chance de haver gol, então $q=0$ (menor valor possível) quando a for positivo e $q=1$ (maior valor possível) quando a for negativo. Quando $a=0$, o valor de q não influencia na probabilidade.

Portanto, a função $y = f(p)$ pedida é $f(p) = \begin{cases} 0{,}3 + 0{,}5 \cdot p, \text{ se } p \le 3/7 \\ 0{,}6 - 0{,}2 \cdot p, \text{ se } p > 3/7 \end{cases}$

Assim, o gráfico pedido é



C o ponto p que maximiza a probabilidade do atacante marcar o gol é o ponto que maximiza a função da letra **B**. Examinando o gráfico é evidente que o máximo é atingido no ponto $p^*=3/7$.