2022

1° Semestre

BLOCO 3

- Matemática Aplicada

VESTIBULAR FGV

UNIFICADO

15\11\2021

RESOLUÇÃO

Pergunta 1

1 Determine o número racional *N* tal que $1-\frac{1}{3+\frac{1}{2\text{-N}}}=\frac{75}{103}$.

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resposta esperada:

$N=\frac{10}{19}$

Resolução:

$1\text{-}\frac{1}{3+\frac{1}{2\text{-N}}}=\frac{75}{103} \rightarrow 3+\frac{1}{2\text{-N}}=\frac{103}{28} \rightarrow \frac{1}{2\text{-N}}=\frac{19}{28} \rightarrow 2\text{-N}=\frac{28}{19} \rightarrow N=\frac{10}{19}$.

Pergunta 2

No mercado do produto A, o preço é estabelecido por um agente regulador.

A demanda por este produto, que é a quantidade que os consumidores desejam adquirir, depende do preço estabelecido. Quanto maior o preço, menor a demanda.

A oferta deste produto, que é a quantidade que os produtores vão oferecer no mercado, também é uma função do preço. Quanto maior o preço, maior a quantidade ofertada desse produto. Se houver mais produtos ofertados do que a demanda, o agente regulador compra o excesso.

Suponha que as funções de demanda d e a oferta o com relação ao preço p sejam

- $d(p) = 100 - 2p$
- $o(p) = p - 11$

onde d e o estão em unidades do produto A, p está em unidades monetárias, $d \geq 0$ e $o \geq 0$.

Responda:

a) Se o agente regulador estabelecer o preço em $p = 40$ unidades monetárias, qual será a quantidade ofertada que não será adquirida pelos consumidores e que, portanto, deverá ser comprada pelo agente regulador?

b) Qual é o maior preço que o agente regulador deve estabelecer para que a quantidade ofertada seja totalmente adquirida pelos consumidores?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Resposta esperada:

a) 9 unidades do produto A.
b) p = 37 unidades monetárias.

Resolução:

a) $o(40)-d(40)=29-20=9$
b) $d(p)=o(p)$. Assim, $100-2\cdot p=p-11$, portanto $p=37$

Pergunta 3
Considere um conjunto finito de números inteiros positivos. Se retirarmos o menor elemento desse conjunto, a média aritmética dos números restantes é 22. Se também retirarmos o maior número desse conjunto, a média aritmética dos restantes passa a ser 21. Se agora recolocarmos o menor, que havia sido retirado, a média aritmética passa a ser 20.
Determine a média aritmética dos elementos do conjunto original.

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resposta esperada:
21

Resolução:
Sejam:
S: a soma de todos os elementos do conjunto original
n: a quantidade de elementos do conjunto original
M: o maior elemento do conjunto original
m: o menor elemento do conjunto original

Assim, tem-se:
$\frac{S-m}{n-1}=22 \rightarrow S-m=22n-22$

$\frac{S-m-M}{n-2}=21 \rightarrow S-m-M=21n-42$

$\frac{S-M}{n-1}=20 \rightarrow S-M=20n-20$

Somando a primeira com a terceira equação e subtraindo a segunda, vem:

$S=21n \rightarrow \frac{S}{n}=21.$

Pergunta 4

Armando, Bianca e Cristina investiram seu dinheiro nas criptomoedas X, Y e Z. O rendimento da criptomoeda Z tem sido constante nos últimos meses.
No mês 1, Armando investiu R$1000,00 em X. Na virada para o mês 2, ele transferiu todo o montante obtido para Y.
Bianca também investiu R$1000,00 em X no mês 1, mas quando o mês virou, transferiu o montante para Z.
Já Cristina começou colocando R$1000,00 em Z no mês 1. Na virada do mês transferiu o montante para Y.

Atenção: os itens abaixo são independentes.

a) Suponha que, com relação ao real, a criptomoeda X valorizou 10% no mês 1 e a Y valorizou −10% (valorização negativa) no mês 2. Qual é o saldo de Armando no final do mês 2, em reais?

b) Suponha que, ao final do mês 2, Armando estava com R$1080,00, Bianca estava com R$1320,00 e Cristina estava com R$990,00. Qual foi a valorização da criptomoeda X no mês 1 com relação ao real?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Resposta esperada:
a) 990 Reais.
b) Valorização de 20%,
Respostas aceitáveis: rendeu 0,2. A razão é de 1,2

Resolução:

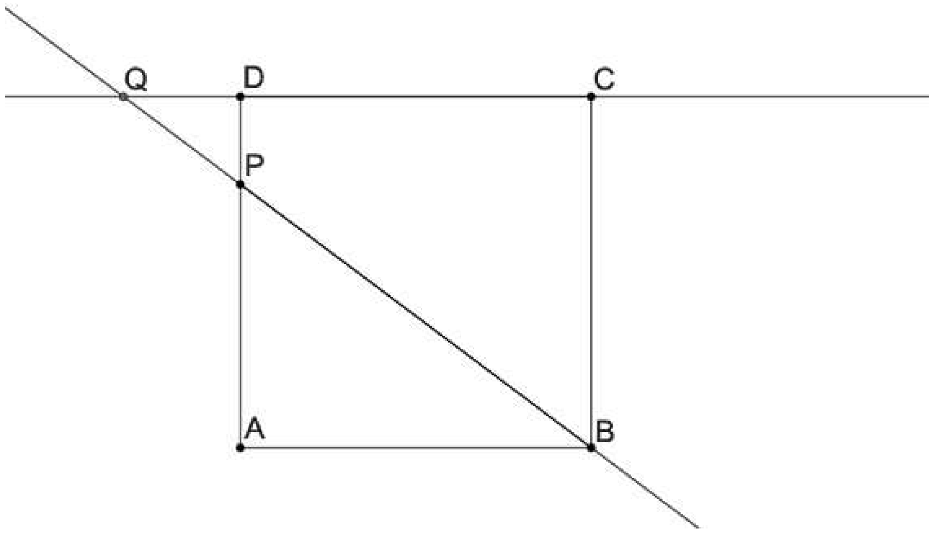
a) Armando $= (1 + 0{,}10) \times (1 - 0{,}10) \times 1000 = 990$ reais.
b) Se x, y, z são os rendimentos de X (mês 1), Y (mês 2) e Z (meses 1 e 2), então:

Armando: $(1+x)*(1+y)*1000 = 1080$
Bianca: $(1+x)*(1+z)*1000 = 1320$
Cristina $(1+z)*(1+y)*1000 = 990$

Resolvendo esse sistema, ficamos com $(1+x) = 1{,}2$, ou seja, $x = 20\%$.

Pergunta 5

Considere o quadrado ABCD da figura abaixo. O ponto Q, sobre a reta DC, é tal que QC = 400 e QB = 500. Determine o comprimento do segmento AP.



Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resposta esperada:

225

Resolução:

O triângulo BQC é retângulo, com cateto 400 e hipotenusa 500. Logo, o cateto menor, que é o lado do quadrado BC, tem comprimento igual a 300. Este triângulo é semelhante ao triângulo ABP, pois tem dois ângulos iguais: o ângulo reto PAB é igual a BCQ e o ângulo APB é igual ao ângulo CBQ (alternos internos). A razão de semelhança é AB/QC = 3/4. Assim, AP/BC = 3/4 e, portanto, AP = 300*3/4 = 225

Pergunta 6
Seja *x* um número real tal que a mediana dos números 4, 1, 13, 9 e *x* seja igual à média desses cinco números.
Determine todos os valores possíveis para *x*.

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resposta esperada:
$-7, \frac{27}{4}$ e 18.

Resolução:
A média dos cinco números é $\frac{1+4+9+13+x}{5} = \frac{27+x}{5}$

Se $x \leq 4$, a mediana será 4. Assim, $\frac{27+x}{5} = 4 \rightarrow x = -7$

Se $4 < x \leq 9$, a mediana será x. Assim, $\frac{27+x}{5} = x \rightarrow x = \frac{27}{4}$

Se $x > 9$, a mediana será 9. Assim, $\frac{27+x}{5} = 9 \rightarrow x = 18$

Logo, os possíveis valores de x são: $-7, \frac{27}{4}$ e 18.

Pergunta 7
Uma lesminha é colocada em um vértice A de um cubo e ela só pode se movimentar pelas arestas do cubo.
No primeiro movimento, ela escolhe aleatoriamente uma das 3 arestas que convergem em A e movimenta-se para o vértice oposto.
A partir do segundo movimento, ela escolhe aleatoriamente uma das duas arestas que não foram usadas no movimento anterior e movimenta-se para o vértice oposto.

a) Sendo B o vértice do cubo que é diametralmente oposto ao vértice A, qual a probabilidade de a lesminha estar no vértice B após o terceiro movimento?

b) Explique por que a lesminha não pode estar no vértice B após o quarto movimento.

No item a, basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Respostas esperadas:

a) $\frac{1}{2}$

b) Após o terceiro movimento, a lesminha estará ou no vértice B ou em um vértice não adjacente ao B. Logo, após o quarto movimento, ela não pode estar no vértice B.

Resolução:

a) Após o segundo movimento, independente de suas escolhas, a lesminha estará em um dos 3 vértices adjacentes ao vértice B, não tendo ainda passado pelo mesmo. Assim, ela terá duas escolhas equiprováveis sendo uma delas ir para o vértice B. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{2}$.

Pergunta 8

Considere o triângulo retângulo OAB cujos vértices no plano cartesiano tenham coordenadas O = (0,0), A = (4,0) e B = (0,3).
Descreva todos os pontos A' e B' do plano de modo que o triângulo OA'B' tenha, simultaneamente, as seguintes propriedades:

- O triângulo OA'B' é semelhante ao triângulo OAB.
- O cateto OA' é maior do que o cateto OB'
- As coordenadas de A' e B' são números inteiros.

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resposta esperada:

São os pontos da forma A′ = (4i,4j) e B′=(−3j,3i) ou B′ = (3j, −3i), com i e j números inteiros quaisquer não simultaneamente iguais a zero.

Resolução:

Sejam A′ = (K,L) e B′= (M,N). Como o segmento OB′ é ortogonal ao segmento OA′, então (M,N) = c*(−L,K), para alguma constante c. Mas sabemos que o comprimento do segmento OB′=(M,N) tem que ser 3/4 do comprimento de OA′, que tem o mesmo comprimento do segmento que vai de (0,0) até (−L,K). Assim, (M,N) = (3/4)*(−L,K). Portanto, M = −3/4*L e N =3/4*K. Vale também M = 3/4*L e N = −3/4*K, se (M,N) = c*(L,−K).
Para que M e N sejam inteiros, é necessário que K e L sejam múltiplos de 4. Quaisquer pontos A′ = (4i,4j) e B′=(−3j,3i) ou B′ = (3j, −3i) apresentam as propriedades desejadas.

Pergunta 9

Carlos montou uma planilha para enxergar o comportamento da sequência $a_n = 0{,}9^n$. O início da planilha é o seguinte

	A	B
1	n	a_n
2	1	0,90
3	2	0,81
4	3	0,72
5	4	0,65
6	5	0,59
7	6	0,53
8	7	0,47
9	8	0,43
10	9	0,38
11	10	0,34
12	11	0,31

Carlos optou por exibir as duas primeiras casas decimais dos termos a_n, sem arredondamento.
Por exemplo, o número 123,456789 é exibido como 123,45. Apesar de a_n ser diferente de 0 para todo n, Carlos observou que a planilha com a precisão de duas casas decimais exibe, a partir do K-ésimo termo em diante, TODOS os termos como 0,00.

a) Explique por que a partir de determinado termo a planilha exibe TODOS os termos como 0,00.

b) Determine K.

Tabela de Logaritmos:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$log_{10}(x)$	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000

No item b, basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Respostas esperadas:

a) A precisão usada nesta planilha é de 0,01. Assim, o termo a_n será exibido como 0,00 quando $a_n<0{,}01$, já que estão sendo exibidas as duas primeiras casas decimais sem arredondamento;

b) K=44.

Resolução:

b) Desejamos saber então os valores de n tais que $a_n<0{,}01$, ou seja, $0{,}9^n<0{,}01$. Portanto,

$$n \cdot log(0{,}9) < log\ (0{,}01)$$

$$n \cdot (log(9) - 1) < -2$$

$$n > \frac{2}{1-0{,}954} \approx 43.5 \rightarrow K = 44$$

Pergunta 10

No plano cartesiano, a partir do ponto (a,b), só há dois movimentos possíveis:

1) ir para o ponto $(a-1, b+1)$;
2) ir para o ponto $(a+1, b+1)$.

a) Explique por que não se pode ir do ponto (0,0) ao ponto (1,8).

b) Quantos são os caminhos diferentes para ir do ponto (0,0) ao ponto (2,8)?

No item b, basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Respostas esperadas:

a) Cada movimento aumenta a ordenada em uma unidade. Assim, para ir do ponto (0, 0) ao ponto (1, 8) serão necessários 8 movimentos. O primeiro tipo de movimento diminui a abcissa em uma unidade e o segundo tipo de movimento aumenta a abcissa em uma unidade. Assim, começando na abcissa 0, para terminar na abcissa 1 teríamos que fazer um movimento a mais do segundo tipo em relação ao primeiro e, nesse caso, o total de movimentos teria que ser ímpar, o que é impossível já que terão que ser 8 movimentos.

b) 56

Resolução:

b) Cada movimento aumenta a ordenada em uma unidade. Assim, para ir do ponto (0, 0) ao ponto (2, 8) serão necessários 8 movimentos. O primeiro tipo de movimento diminui a abcissa em uma unidade e o segundo tipo de movimento aumenta a abcissa em uma unidade. Assim, começando na abcissa 0, para terminar na abcissa 2 teremos que fazer dois movimentos a mais do segundo tipo em relação ao primeiro, ou seja, temos que fazer 5 movimentos do segundo tipo e 3 do primeiro. Obteremos caminhos diferentes variando a ordem em que os movimentos serão feitos. Assim, dos oito movimentos a serem executados temos que escolher 3 para serem do primeiro tipo (automaticamente, os outros 5 serão do segundo tipo). O número de escolhas é o número de combinações de 8, 3 a 3, isto é: $\frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$. Logo, são 56 caminhos diferentes para ir do ponto (0, 0) ao ponto (2, 8).

Fim da Prova de Matemática Aplicada.